Ueber einige Eigenschaften

des

Darboux'schen

astatischen Centralellipsoides,

welche denjenigen des

Cauchy-Poinsot'schen und des Binet'schen Trägheitsellipsoides analog sind.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

hochlöblichen philosophischen Facultät zu Marburg

eingereicht von

Karl Kuhn

aus Fulda.

MARBURG.

Druck von C. L. Pfeil.

1882.

In dem ersten Haupttheile der theoretischen Mechanik, welcher die Geometrie der Streckensysteme und die Geometrie der Massen enthält und daher als Einleitung in die Statik und Kinematik aufgefasst werden kann, kommen drei Momente zweiter Ordnung in Betracht, die zueinander in einfacher, bekannter Beziehung stehen.

Das quadratische Moment eines materiellen Punktes oder Systemes solcher Punkte bezüglich eines Poles ist gleich der Summe der quadratischen Momente bezüglich einer Ebene, die durch den Pol geht, und bezüglich der Geraden oder Axe, welche diese Ebene in dem Pole senkrecht durchschneidet.

Speziell für das Produkt ($\Sigma m.r^2$ oder $\int r^2\,dm$) aus der Masse eines Systemes von Punkten und dem mittleren quadratischen Abstand desselben von einer zugehörigen Axe hat Euler den Terminus „Trägheitsmoment“ (momentum inertiae) eingeführt (Theoria modus corporum solidorum. cap. 5).

Wie die theoretische Mechanik überhaupt als eine vorzugsweise geometrische Wissenschaft angesehen werden kann, weil in ihr viele Sätze geometrischen Inhalts abgeleitet werden, so kann man auch in der Theorie der Trägheitsmomente geometrische Probleme mannigfacher Art entwickeln und interpretiren.

Besonders kommt hier eine Fläche zweiter Ordnung, das Ellipsoid, zur Geltung. Verschiedene Theorien der Mechanik erlangen durch Einführung desselben einen hohen Grad geometrischer Durchsichtigkeit, vor allen die Theorie der Trägheitsmomente und die Astatik.

Cauchy fand in seiner Untersuchung über die Axen eines Strahlenbündels und die Trägheitsmomente bezüglich derselben,

„dass es für jeden Punkt ein Ellipsoid gibt, welches jenen Punkt zum Mittelpunkt hat, und dessen Radienvectoren, als Drehungsaxen betrachtet, zugleich die Quadratwurzel des reciproken Trägheitsmomentes, durch ihre eigene Länge darstellen" (Exercices de Mathematiques T. II. 1824).

Poinsot erkannte zuerst die Bedeutung dieses Ellipsoides für die Rotationsbewegung, daher die Bezeichnung „Cauchy-Poinsot'sches Trägheitsellipsoid."

Binet führte die Trägheitsmomente für Ebenen ein, für welche man ein analoges Ellipsoid, das Binet'sche Trägheitsellipsoid" darstellen kann (Journal de l'Ecole polytechn. Cah. XVI. 1811).

Eine ähnliche Bedeutung, wie sie Binet, Cauchy und Poinsot dem Trägheitsellipsoid für die Theorie der Trägheitsmomente gegeben haben, giebt Darboux für die Astatik dem „astatischen Centralellipsoid."

Darboux veröffentlichte das nach ihm benannte Ellipsoid in seiner Abhandlung „Mémoire sur l'équilibre astatique . . . . . ." Bordeaux 1877. Er entwickelte folgende Eigenschaften desselben:

„Das astatische Centralellipsoid liefert durch die reciproken Werte seiner vom Mittelpunkte ausgehenden Radienvectoren die Intensität der Seitenkräfte der Reductionspaare, deren Arme in die Richtung der Radienvectoren fallen."

„Unter allen Reductionen eines Kräftesystemes auf eine Resultante und drei Paare mit zueinander rechtwinkligen astatischen Armen für einen Punkt *O* gibt es eine ein-

zige, für welche die drei Seitenkräfte der Paare zueinander senkrecht sind. Für sie haben die astatischen Arme die Richtungen der Hauptaxen des Centralellipsoides des Punktes O.“

Ebenso wie man bei den genannten Trägheitsellipsoiden viele mechanische Eigenschaften durch geometrische Betrachtungen ableiten kann, indem fast jeder Satz über die Diameter des Ellipsoides einen entsprechenden Satz über Trägheitsmomente liefert, so wird man bei dem Darboux'schen Centralellipsoid auf analoge Weise analoge Resultate erzielen.

Zu dem Zwecke werden zunächst das Cauchy-Poinsot'sche und das Binet'sche Ellipsoid und einige sich auf dieselben beziehenden, zum Theil bereits bekannte Sätze entwickelt werden, um alsdann die entsprechenden Operationen an dem Centralellipsoide vorzunehmen.

Die Fundamentalaufgabe der Theorie der Trägheitsmomente besteht darin, das Trägheitsmoment eines materiellen Punktes oder eines Systemes solcher Punkte bezüglich einer beliebigen Axe des Raumes zu finden.

Fasst man zunächst nur zueinander parallele Strahlen ins Auge, so gestaltet sich die Lösung ziemlich einfach.

Es seien r und r' die Abstände eines Punktes O von zwei parallelen Axen, und letztere um die Länge δ von einander entfernt. Es bilden also r, r' und δ ein Dreieck, woraus folgt:

$$r'^2 = r^2 - 2\,r\,\delta\cos(r,\delta) + \delta^2; \qquad (1\,\alpha)$$

mithin

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 - 2\,\delta\,\Sigma m r\cos(r,\delta) + \delta^2 \Sigma m. \qquad (1\,\beta)$$

Geht die vom Punkte O um die Länge r abstehende Axe durch den Schwerpunkt, so verschwindet das Moment ersten Grades $\Sigma m r\cos(r,\delta)$. Es ist für diesen Fall:

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + \delta^2 \Sigma m. \qquad (2)$$

Diese Gleichung ergibt den bekannten Satz:

„Sobald man das Trägheitsmoment für die Axen des Massenmittelpunktes kennt, wird das Trägheitsmoment

bezüglich einer beliebigen parallelen Axe dadurch angegeben, dass man zu dem bekannten Trägheitsmomente das Trägheitsmoment des Massenmittelpunktes bezüglich der neuen Axe addirt."

Zu dem allgemeinen Falle übergehend nehmen wir O als den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes an. Es sei h eine beliebige durch O gehende und durch die Richtungscosinusse: α, β, γ bestimmte Axe. Der Abstand eines durch die Coordination: x, y, z bestimmten Punktes M von der Axe (α, β, γ), von dem Punkte O und von der durch O zur Axe (α, β, γ) senkrecht gelegene Ebene sei r, resp. p, resp. q.

Aus geometrischen Gründen ist:

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2; \qquad (3\,\alpha)$$
$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z; \qquad (3\,\beta)$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \qquad (3\,\gamma)$$
$$p^2 = q^2 + r^2; \qquad (3\,\delta)$$

mithin nach einiger Umformung:

$$\Sigma m r^2 = \alpha^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \Sigma m (x^2 + y^2) - 2\beta\gamma \Sigma m yz - 2\gamma\alpha \Sigma m zx - 2\alpha\beta \Sigma m xy. \qquad (4)$$

$(y^2 + z^2)$, $(z^2 + x^2)$ und $(x^2 + y^2)$ sind die quadratischen Abstände des Punktes M von den Coordinatenaxen, also stellen die betreffenden Glieder der Gleichung (4) Trägheitsmomente bezüglich dieser Axen dar.

Der Punkt M ist in seiner Lage zu den Coordinatenaxen zunächst als fest angenommen, die Richtung der durch α, β, γ bestimmten Axe dagegen als variabel. Der Kürze wegen setzen wir:

$$\begin{aligned} \Sigma m (y^2 + z^2) &= a_{11}; & \Sigma m yz &= a_{23}; \\ \Sigma m (z^2 + x^2) &= a_{22}; & \Sigma m zx &= a_{31}; \\ \Sigma m (x^2 + y^2) &= a_{33}; & \Sigma m xy &= a_{12}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Diese Werthe in Gleichung (4) eingesetzt ergibt;

$$\Sigma m r^2 = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 - 2a_{23}\beta\gamma - 2a_{31}\gamma\alpha - 2a_{12}\alpha\beta. \qquad (6)$$

„Das Trägheitsmoment eines Systemes in Bezug auf einen durch die Richtungscosinusse α, β, γ bestimmten Strahl ist eine homogene Funktion zweiten Grades dieser Richtungscosinusse in Bezug auf irgend drei zueinander senkrechte in O sich schneidende Axen."

Während nun die drei ersten Coefficienten (a_{11}, a_{22}, a_{33}) in der letztvorhergegangenen Gleichung Trägheitsmomente bedeuten und daher wesentlich positive Grössen sind, können die Coefficienten der drei letzten Glieder (a_{23}, a_{31}, a_{12}) je nach der Lage der Coordinatenaxen positiv oder negativ sein. Man pflegt sie „Deviationsmomente" zu nennen. Sie verschwinden, sobald man die Hauptaxen der durch Gleichung (6) dargestellten Fläche als Coordinatenaxen wählt.

Zuvor wird man die Gleichung (6) noch etwas umformen.

Auf allen durch den Coordinatenursprung gezogenen Axen denke man sich vom Ursprung aus eine Länge ϱ so abgetragen, dass

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\Sigma m r^2}}, \text{ also } \varrho^2 = \frac{1}{\Sigma m r^2} \text{ wird. } (7\alpha) \text{ u. } (7\beta)$$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (6) mit ϱ^2 und bedenkt, dass: $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$ die Coordinaten des Endpunktes von ϱ sind, die wir mit x, y, z bezeichnen, so erhalten wir als Gleichung der Oberfläche:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 - 2 a_{23} yz - 2 a_{31} zx - 2 a_{12} xy = 1. \quad (8)$$

Dieses ist eine Oberfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt im Coordinatenursprung liegt. Da der Radiusvector $\varrho = \frac{1}{\sqrt{\Sigma m r^2}}$ ist und deshalb weder unendlich noch imaginär werden hann, so muss diese Fläche nothwendig ein Ellipsoid sein.

Es ist das Cauchy-Poinsot'sche Trägheitsellipsoid.

Sind die Hauptaxen der Fläche (8) zugleich die Coordinatenaxen, so verschwinden die drei letzten Glieder: $2\,a_{23}\,y\,z$, $2\,a_{31}\,z\,x$, $2\,a_{12}\,x\,y$.

Für diesen Fall sei

$$A = a_{11}\,,\; B = a_{22}\,,\; C = a_{33}.$$

Die Gleichung des Ellipsoides ist jetzt:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1. \tag{9}$$

Die Hauptaxen nennt man Hauptträgheitsaxen und die zugehörigen Momente Hauptträgheitsmomente.

Es gibt für jeden Punkt gewisse zu einander senkrechte Richtungen, für welche diese Richtungen mit den Hauptaxen zusammenfallen.

Da $\varrho = \frac{1}{\sqrt{\Sigma m r^2}}$ ist, so leuchtet ein, dass mit wachsendem Radiusvector ϱ des Ellipsoides das zugehörige Trägheitsmoment, also auch der mittlere Trägheitsradius abnehmen, im anderen Falle dagegen zunehmen wird.

Mit Rücksicht darauf lässt man in Gleichung (6) $\Sigma m r^2$, für die Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, zu einem Maximum oder Minimum werden.

Differentiiren wir Gleichung (6) der Reihe nach nach α, β und γ, so erhalten wir die Gleichungen, nachdem wir noch zuvor $\Sigma m r^2 = T$ (10) gesetzt haben:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = o; \quad \frac{\partial T}{\partial \beta} = o; \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = o; \tag{11}$$

oder ausgeführt:

$$\begin{aligned} (T - a_{11})\,\alpha + \quad a_{12}\,\beta + \quad a_{31}\,\gamma &= o; \\ a_{12}\,\alpha + (T - a_{22})\,\beta + \quad a_{23}\,\gamma &= o; \\ a_{31}\,\alpha + \quad a_{23}\,\beta + (T - a_{33})\,\gamma &= o. \end{aligned} \tag{12}$$

Nach Elimination von α, β, γ resultirt:

$$(T-a_{11})(T-a_{22})(T-a_{33})-a^2_{23}(T-a_{11})-a^2_{31}(T-a_{22})-a^2_{12}(T-a_{33})+2\,a_{11}\,a_{22}\,a_{33}=o. \qquad (13)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung: $T_{,}$, $T_{,,}$, $T_{,,,}$ sind die Hauptträgheitsmomente und daher nothwendig reelle Grössen. Im Allgemeinen sind die Wurzeln von einander verschieden, alsdann erhalten wir ein dreiaxiges Ellipsoid, sind zwei Wurzeln einander gleich, ein Rotationsellipsoid, sind alle drei einander gleich, eine Kugel.

Die Reihenfolge der aus Gleichung (13) sich ergebenden Werthe: $T_{,}$, $T_{,,}$, $T_{,,,}$ möge zugleich ihre relative Grösse angeben.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (7α) und (7β) ist:

$$\varrho_1=\sqrt{\frac{1}{T_{,}}}; \qquad \frac{1}{\varrho_1^{\,2}}=T_{,};$$

$$\varrho_2=\sqrt{\frac{1}{T_{,,}}}; \quad (14\alpha) \qquad \frac{1}{\varrho_2^{\,2}}=T_{,,}; \quad (14\beta)$$

$$\varrho_3=\sqrt{\frac{1}{T_{,,,}}}; \qquad \frac{1}{\varrho_3^{\,2}}=T_{,,,}.$$

Es wird also ϱ_1 die kleine, ϱ_2 die mittlere und ϱ_3 die grosse Halbaxe des Ellipsoides sein, da $T_{,}>T_{,,}>T_{,,,}$ angenommen ist.

Als Hauptdurchmesser eines Ellipsoides sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 conjugirte Durchmesser. Demnach gehen aus Gleichung (14β) folgende Gleichungen hervor:

$$\frac{1}{\varrho_1^{\,2}}+\frac{1}{\varrho_2^{\,2}}+\frac{1}{\varrho_3^{\,2}}=T_{,}+T_{,,}+T_{,,,}=\text{const.}; \qquad (15)$$

$$\varrho_1^{\,2}+\varrho_2^{\,2}+\varrho_3^{\,2}=\frac{1}{T_{,}}+\frac{1}{T_{,,}}+\frac{1}{T_{,,,}}=\text{const.}; \qquad (16)$$

$$\frac{1}{\varrho_1^{\,2}\cdot\varrho_2^{\,2}\cdot\varrho_3^{\,2}}=T_{,}\cdot T_{,,}\cdot T_{,,,}=\text{const.} \qquad (17)$$

Bekannt sind die hieraus abgeleiteten Sätze:

„Die Summe der Trägheitsmomente für drei zu einander senkrechte Axen eines Punktes ist constant, nämlich gleich der Summe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes."

„Die Summe der reciproken Werthe der Trägheitsmomente für drei in Bezug auf das Trägheitsellipsoid conjugirte Durchmesser ist constant, nämlich gleich der Summe der reciproken Werthe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes."

Aus einer weiteren Eigenschaft des Ellipsoides folgt noch der Satz:

„Der Ort der Axen eines Punktes von gleichem Trägheitsmomente ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoide gleiche Hauptaxen besitzt."

Wenden wir uns zu dem Binet'schen Trägheitsellipsoid.

Obgleich sich dasselbe nicht wesentlich von dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoide unterscheidet, wird es doch von Interesse sein, insofern auf dasselbe etwas ausführlicher einzugehen, als eine andere Methode bei der Entwickelung desselben, bei der Berechnung der Hauptaxen und bei der Ableitung der Sätze über die Diameter, durchgeführt werden soll. Bei dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoide würden wir auch auf diesem Wege zu den bereits bekannten Resultaten gelangen. Wir verzichten vorerst, näher darauf einzugehen.

Aus Gleichung (3β) fliesst der Ausdruck für das Trägheitsmoment des Punktes M in Bezug auf die durch den Coordinatenanfangspunkt gehende, zu der durch α, β, γ bestimmten Axe senkrechte Ebene.

$$\Sigma mq^2 = \alpha^2\Sigma mx^2 + \beta^2\Sigma my^2 + \gamma^2\Sigma mz^2 + 2\beta\gamma\Sigma myz + 2\gamma\alpha\Sigma mzx + 2\alpha\beta\Sigma mxy. \qquad (18)$$

Setzen wir hier die Trägheitsmomente bezüglich der Coordinatenebenen

$$\Sigma m x^2 = a'_{11}; \quad \Sigma m y^2 = a'_{22}; \quad \Sigma m z^2 = a'_{33},$$

so erhalten wir, da die Coefficienten der drei übrigen rechtsseitigen Glieder dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Glieder in Gleichung (6) haben, und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden:

$$\Sigma m q^2 = a'_{11}\alpha^2 + a'_{22}\beta^2 + a'_{33}\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha + 2a_{12}\alpha\beta. \tag{19}$$

Trägt man jetzt auf der Normalen der Ebene nach beiden Richtungen vom Coordinatenanfangspunkt aus eine Grösse ϱ so ab, dass

$$\varrho = \sqrt{\frac{\text{const.}}{\Sigma m q^2}}, \text{ also } \varrho^2 = \frac{\text{const.}}{\Sigma m q^2} \tag{20}$$

wird, und setzt

$$\varrho\alpha = x, \quad \varrho\beta = y, \quad \varrho\gamma = z, \tag{21}$$

so ergibt sich, nachdem auf beiden Seiten der Gleichung (19) mit ϱ^2 multiplicirt worden ist:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \text{const.} \tag{22}$$

Diese Gleichung stellt aus denselben Gründen wie Gleichung (8) ein Ellipsoid dar:

Werden die Hauptaxen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, so verschwinden auch hier die drei letzten Glieder. Es sei für diesen Fall:

$$a'_{11} = A', \quad a'_{22} = B', \quad a'_{33} = C'. \tag{23}$$

Als Gleichung für das Binet'sche Trägheitsellipsoid erhält man:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \text{const.} \tag{24}$$

Hierdurch wird eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide ausgedrückt, welche mit dem Cauchy-

Poinsot'schen die Mittelpunkte und die Hauptaxen gemein haben und ebenso wie dieses zur Bestimmung der Hauptaxen benutzt werden können.

Bei dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoide haben wir den speciellen Fall angenommen, dass die Constante auf der rechten Seite der Gleichung (24) gleich der Einheit wird.

Um die Hauptaxen zu bestimmen, drücken wir die Bedingung aus, dass die Tangentenebene der durch Gleichung (22) dargestellten Fläche auf dem Radiusvector in dessen Endpunkt senkrecht stehen soll, was in unserm Falle nur bei denjenigen Radienvectoren möglich ist, welche Hauptaxen sind.

Die Gleichung des Ellipsoides sei:

$$U = a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2\beta\gamma yz + 2\gamma\alpha zx + 2\alpha\beta xy - \text{const.} = o. \qquad (25)$$

Die Richtungscosinusse der Normalen dieser Fläche sind proportional den Grössen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} &= a'_{11}x + a_{12}y + a_{31}z; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} &= a_{12}x + a'_{22}y + a_{23}z; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z} &= a_{31}x + a_{23}y + a'_{33}z; \end{aligned} \qquad (26\alpha)$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (21):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} &= \varrho(a'_{11} + a_{12} + a_{31}); \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} &= \varrho(a_{12} + a'_{22} + a_{23}); \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z} &= \varrho(a_{31} + a_{23} + a'_{33}). \end{aligned} \qquad (26\beta)$$

Soll jetzt die Richtung der Normale mit der des Radiusvectors zusammenfallen, so müssen folgende Gleichungen gelten, in denen λ einen noch unbestimmten Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$\begin{aligned} a'_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{31}\gamma &= \lambda\alpha; \\ a_{12}\alpha + a'_{22}\beta + a_{23}\gamma &= \lambda\beta; \\ a_{31}\alpha + a_{23}\beta + a'_{33}\gamma &= \lambda\gamma. \end{aligned} \tag{27}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, die erste mit α, die zweite mit β und die dritte mit γ, so erhält man nach ihrer Addition:

$$\begin{aligned} a'_{11}\alpha^2 + a'_{22}\beta^2 + a'_{33}\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha + 2a_{12}\alpha\beta &= \lambda \\ &= \Sigma m q^2. \end{aligned} \tag{28}$$

λ ist also das dem Radiusvector entsprechende Trägheitsmoment. Nach Elimination der Grössen α, β, γ aus den Gleichungen (27) erhält man eine cubische Gleichung für λ zur Bestimmung der drei den Hauptaxen entsprechenden Hauptträgheitsmomente:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a'_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a'_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Dass die Wurzeln dieser Gleichung reell sind, ersieht man leicht, wenn man die Determinante (29) etwas umformt

Die einzelnen Reihen mit a_{23}, a_{31} und a_{12} multiplicirt, ergibt:

$$\begin{vmatrix} (a'_{11} - \lambda)\, a_{23} & a_{23}\, a_{12} & a_{23}\, a_{31} \\ a_{31}\, a_{12} & (a'_{22} - \lambda)\, a_{31} & a_{23}\, a_{31} \\ a_{31}\, a_{12} & a_{23}\, a_{12} & (a'_{33} - \lambda)\, a_{12} \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Von der ersten Reihe die zweite und von der zweiten die dritte subtrahirt ergibt:

$$\begin{vmatrix} (a'_{11}-\lambda)a_{23}-a_{31}a_{12} & a_{23}a_{13}-(a'_{22}-\lambda)a_{31} & o \\ o & (a'_{22}-\lambda)a_{31}-a_{23}a_{12} & a_{23}a_{31}-(a'_{33}-\lambda)a_{12} \\ a_{31}a_{12} & a_{23}a_{12} & (a'_{33}-\lambda)a_{12} \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Dividirt man jetzt die Colonnen der Determinante (31) der Reihe nach durch a_{23}, a_{31}, a_{12}, so erhält man, wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a'_{11}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}=f; \quad a'_{22}-\frac{a_{23}a_{12}}{a_{31}}=g; \quad a'_{33}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}=h. \quad (32)$$

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f-\lambda & -(g-\lambda) & o \\ o & g-\lambda & -(h-\lambda) \\ \frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}} & \frac{a_{23}a_{12}}{a_{31}} & (h-\lambda)+\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}} \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

Entwickelt:

$$\frac{\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}}{\lambda-f}+\frac{\frac{a_{23}a_{12}}{a_{31}}}{\lambda-g}+\frac{\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}}{\lambda-h}-1=0. \quad (34)$$

Die Form dieser Gleichung lässt erkennen, dass, wenn die Folge der Wurzeln λ', λ'', λ''' auch ihre relative Grösse angibt, diese Wurzeln liegen müssen zwischen

$$-\infty, f, g, h,$$

wenn das Produkt f, g, h positiv ist, oder zwischen

$$f, g, h, +\infty,$$

wenn das Produkt f, g, h negativ ist. Auf jeden Fall sind die Grössen λ', λ'', λ''' reell.

Wie aus Gleichung (28) ersichtlich ist, bedeutet λ das Trägheitsmoment, welches der durch die Richtungscosinusse ihrer Normalen bestimmten Ebene entspricht.

Es sei

$$\lambda = \Sigma m q^2 = T_1.$$

Die aus Gleichung (29) zu berechnenden Wurzeln: T'_1, T''_1, T'''_1 sind die den Hauptebenen entsprechenden Trägheitsmomente.

Die Hauptaxen des Ellipsoids sind gemäss der Gleichung (20):

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{\text{const.}}{T'_1}}; \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{\text{const.}}{T''_1}}; \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{\text{const.}}{T'''_1}}. \qquad (35\alpha)$$

Es ist also

$$T'_1 = \frac{\text{const.}}{\varrho_1^2}; \quad T''_1 = \frac{\text{const.}}{\varrho_2^2}; \quad T'''_1 = \frac{\text{const.}}{\varrho_3^2}. \qquad (35\beta)$$

Da $T'_1 > T''_1 > T'''_1$ angenommen wird, so ist ϱ_1 die kleine, ϱ_2 die mittlere und ϱ_3 die grosse Halbaxe des Ellipsoides. Es könnten nun aus den Gleichungen (35α) und (35β) Sätze abgeleitet werden, welche ganz analog den aus den Gleichungen (15), (16) und (17) über das Cauchy-Poinsot'sche Ellipsoid abgeleiteten sind.

Doch werden wir hierzu auf einem kürzeren Wege gelangen, ohne auf die Eigenschaften des Ellipsoides und seiner Durchmesser zu recurriren.

Entwickelt man Gleichung (29) und ordnet sie nach den Potenzen von T_1, so ergibt sich:

$$T_1^3 + lT_1^2 + mT_1 + n = o. \qquad (36)$$

Zur Abkürzung ist hier gesetzt:

$$l = -(a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}); \tag{37\alpha}$$

$$m = (a'_{22}a'_{33} + a'_{33}a'_{11} + a'_{11}a'_{22} + a^2_{23} + a^2_{31} + a^2_{12}); \tag{37\beta}$$

$$n = a'_{11}a^2_{23} + a'_{22}a^2_{31} + a'_{33}a^2_{12} - a'_{11}a'_{22}a'_{33} - 2a_{23}a_{31}a_{12}. \tag{37\gamma}$$

Nach den Regeln der Algebra ist aber auch:

$$-l = (T'_1 + T''_1 + T'''_1) = (a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}); \tag{38}$$

$$m = T''_1T'''_1 + T'''_1T'_1 + T'_1T''_1 = (a'_{22}a'_{33} + a'_{33}a'_{11} + a'_{11}a'_{22} + a^2_{23} + a^2_{31} + a^2_{12}); \tag{39}$$

$$n = -T'_1T''_1T'''_1 = a'_{11}a^2_{23} + a'_{22}a^2_{31} + a'_{33}a^2_{12} - a'_{11}a'_{22}a'_{33} - 2a_{23}a_{31}a_{12}; \tag{40}$$

$$-\frac{m}{n} = \frac{1}{T'_1} + \frac{1}{T''_1} + \frac{1}{T'''_1}. \tag{41}$$

Diese Gleichungen ergeben die gesuchten Sätze sofort und zwar noch vollständiger.

„Die Summe der Trägheitsmomente für drei zu einander senkrechte Ebenen eines Punktes ist constant, nämlich gleich der Summe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes.“ [Gleichung (38)].

„Die Summe der Produkte aus je zwei Trägheitsmomenten für drei zu einander senkrechten Ebenen eines Punktes vermehrt um die Quadrate der Deviationsmomente ist constant, nämlich gleich der Summe der Produkte aus je zwei Hauptträgheitsmomenten dieses Punktes.“ [Interpretation der Gleichung (39)].

„Die Summe der Produkte aus je zwei Trägheitsmomenten für die zu einander senkrechte Ebene eines Punktes ist ein Maximum, wenn die Ebenen mit den Hauptebenen des Binet'schen Trägheitsellipsoid zusammenfallen.“ [Gleichung (39)].

„Die Summe der reciproken Trägheitsmomente für drei zu einander in Bezug auf das Binet'sche Trägheitsellipsoid conjugirte Durchmesser ist constant, nämlich gleich der Summe der reciproken Werthe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes.“ [Gleichung (41)].

„Das Produkt der Hauptträgheitsmomente eines Punktes bezüglich des Binet'schen Trägheitsellipsoids ist constant." [Gleichung (40)].

Es ergiebt sich von selbst, dass auch bei dem Binet'schen Ellipsoid der Ort der Axen eines Punktes von gleichem Trägheitsmoment ein Kegel zweiten Grades ist, welcher mit dem Ellipsoid gleiche Hauptaxen besitzt.

Es wird genügen, nur den Wortlaut der Sätze anzugeben, wie man sie mit Hülfe der eben durchgeführten Methode bei dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoid findet. Wir beschränken uns auf die, welche nicht mit den nach der früheren Methode bereits abgeleiteten übereinstimmen.

„Die Summe der Produkte aus je zwei Trägheitsmomenten für drei zu einander senkrechte Axen eines Punktes vermindert um die Quadratsumme der Deviationsmomente ist constant, nämlich gleich der Summe der Produkte aus je zwei Hauptträgheitsmomenten dieses Punktes."

„Die Summe der Produkte aus je zwei Trägheitsmomenten für drei zu einander senkrechte Axen eines Punktes ist ein Minimum, wenn die Axen mit den Hauptaxen des Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoides zusammenfallen."

Bevor wir jetzt zum dritten Theile unseres Themas übergehen, zu der Entwickelung des Darboux'schen Centralellipsoides, mögen erst einige Bemerknngen hier ihren Platz finden über das Eigenthümliche des astatischen Gleichgewichtes und der astatischen Aequivalenz von Kräftesystemen am unveränderlichen Punktsystem.

Wirkt auf einen starren Körper ein System paralleler Kräfte, so wird nach den Lehren der Statik ein sog. Centrum dieser Kräfte existiren, d. h. ein Angriffspunkt einer einzelnen Kraft, welche mit den in Betracht kommenden Kräften gleiche Richtung hat und gleich ihrer algebraischen Summe ist, also immer jene ersetzen kann. Rückt jedoch dieser Punkt in das Unendliche, dann reduciren sich im Allgemeinen die Kräfte auf ein Kräftepaar. Wird das Cen-

trum unbestimmt, so werden sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, wie immer ihre Lage und Richtung und die Stellung des Körpers sei.

Moebius regte zuerst den Gedanken an, auf ein beliebig zusammengesetztes Kräftesystem die Eigenschaften des Centrums paralleler Kräfte auszudehnen, d. h. zu prüfen, wie die Wirkung eines beliebigen Systems von Kräften sich ändert, welches an bestimmten Punkten des festen Körpers angebracht ist. (Moebius, Statik).

Entweder ändert sich die Lage des Körpers, die Grösse und Richtung der Kräfte dagegen bleibt dieselbe; oder der Körper bleibt in Ruhe, während die Richtung der Kräfte sich ändert, so zwar, dass letztere unter einander stets denselben Winkel bilden. Beides kommt auf eins hinaus. Sind alle Bedingungen erfüllt, für welche der Körper in allen Lagen im Gleichgewicht gehalten wird, so wird er sich im „astatischen Gleichgewicht" befinden.

Demnach kann man unter dem Namen Astatik alle Untersuchungen zusammenfassen, welche die Frage betreffen, wie die Wirkung eines Kräftesystemes auf ein Punktsystem sich ändert, wenn die relative Lage beider ohne Veränderung der Angriffspunkte eine Aenderung erleidet. (Schell, theor. Mech. B. II).

In der bereits erwähnten Abhandlung von Darboux, „Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de position dans l'espace," werden durch Einführung des Centralellipsoides, analog denjenigen, welchen man in der Theorie der Trägheitsmomente begegnet, die bereits bekannten Sätze der Astatik in mancher Hinsicht vervollständigt.

Während Moebius glaubte, dass, wenn für vier Lagen des Körpers Gleichgewicht stattfinde, es in allen Lagen stattfinden müsse, zeigt Darboux mit Hülfe des Ellipsoides, dass zwar stets vier Lagen existiren, für welche sich die

Kräfte das Gleichgewicht halten, dass jedoch für besondere Fälle unendlich viel Gleichgewichtslagen möglich sind.

Die Resultate ferner, die Minding (Crelle's Journal. Bd. XV. S. 27) in der Theorie der Astatik mit Hülfe des Calculs findet, finden ihre natürlichste Erklärung durch das Darboux'sche Centralellipsoid.

Die Transformationen von Kräften, welche an einem starren Körper wirken, lassen sich auf drei Operationen zurückführen:

1) Zusammenstellung oder Zerlegung von Kräften, welche alle an einem Punkte angebracht sind.
2) Zusammenstellung von zu einander parallelen Kräften.
3) Verlegung einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie.

Da die Verlegung einer Kraft an einen anderen Angriffspunkt auf der Zufügung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte beruht, so dass in Folge dessen bei einer Aenderung des Systemes ein Kräftepaar entsteht, wird die Aequivalenz der ursprünglichen Kraft mit der in den neuen Angriffspunkt verlegten nicht mehr vorhanden sein.

Aus diesem Grunde hat das Axiom, die Verlegung einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie betreffend, keine Gültigkeit mehr.

Die der Astatik eigenthümlichen Regeln sind kurz folgende:

Die Verbindungslinie zweier Seitenkräfte wird in der Astatik als constant angenommen. Man nennt sie den astatischen Arm; die Richtung der Seitenkräfte dagegen ist beliebig. Letztere verschwinden, sobald sie mit dem astatischen Arm zusammenfallen, d. h. mit ihm dieselbe Richtung haben.

Ohne den Wert oder die Wirkung eines astatischen Kräftepaares zu ändern, kann man den Arm mit einer Zahl multipliciren oder dividiren, wenn man mit derselben Zahl die Seitenkräfte dividirt resp. multiplicirt.

Der Arm kann parallel zu sich selbst verschoben werden, jedoch muss der Sinn des Kräftepaares derselbe bleiben.

Das astatische Kräftepaar kann in mehrere andere zerlegt werden.

Ausserdem muss bei der Ableitung des astatischen Centralellipsoides noch Folgendes als bekannt vorausgesetzt werden:

„Ist ein Kräftesystem an einem unveränderlichen Punktsystem in zwei Lagen im Gleichgewicht, so besteht dasselbe für alle Lagen fort, welche es durch Rotation um die Axe erreichen kann, welche die Doppellinie der beiden Lagen ist, vorausgesetzt jedoch, dass jene beiden Lagen nicht symmetrisch sind zur Axe."

„Es müssen zwölf Bedingungen erfüllt sein, soll zwischen den Kräften für jede Lage des Punktsystemes Gleichgewicht bestehen."

Mit Uebergehung der Beweise dieser Sätze (s. Darboux, Mém.) soll noch die Zurückführung eines Systemes von Kräften auf eine Resultante und drei Kräftepaare auseinandergesetzt werden, um alsdann zu der Aufstellung der Gleichung des Centralellipsoides fortzuschreiten.

Am Punkte A, welcher durch die Coordinaten x, y, z. bestimmt sei, wirke eine Kraft P, ihre Componenten seien X, J, Z. Greift im Coordinatenursprung O eine geometrisch gleiche Kraft an, so wird sie in Verbindung mit einem Paare $(P_1 — P)$ vom astatischen Arme OA äquivalent sein.

Tragen wir jetzt von O aus x, y, z in ihrer entsprechenden Richtung ab und bringen an ihren Endpunkten je zwei entgegengesetzte Kräfte P an, to ergeben sich drei Paare von den astatischen Armen x, y, z.

Führt man die Arme auf die Einheit zurück, so sind die zugehörigen Seitenkräfte: xP, yP, zP. Diese drei Seitenkräfte werden nun wieder in ihre Componenten parallel zu den Axen x, y und z zerlegt.

Für xP erhalten wir die drei Seitenkräfte:

$$xX, xJ, xZ.$$

Die Kräfte yP und zP zerfallen natürlich auch in je drei Seitenkräfte, deren Arme alle gleich der Einheit sind. Dieses Verfahren bei allen Kräften angewandt, ergiebt drei Paare auf der Axe der y und drei auf der Axe der z. Wir erhalten also ein System von neun Seitenkräften:

$$\begin{aligned} \Sigma xX = a_{11} \ , \ \Sigma xJ = a_{12} \ , \ \Sigma xZ = a_{13}, \\ \Sigma yX = a_{21} \ , \ \Sigma yJ = a_{22} \ , \ \Sigma yZ = a_{23}, \\ \Sigma zX = a_{31} \ , \ \Sigma zJ = a_{32} \ , \ \Sigma zZ = a_{33}. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Reductionsresultante ergiebt nun auch drei Componenten: A, B, C.

Soll jetzt astatisches Gleichgewicht eintreten, so müssen sowohl die unter (42) dargestellten Paare als auch die Componenten der Reductionsresultanten verschwinden, also zwölf Bedingungen erfüllt sein. Die neun Seitenkräfte lassen sich zu drei Seitenkräften vereinigen, und zwar:

$$\begin{aligned} a_{11} \ , \ a_{12} \ , \ a_{13} \text{ zu } K_x, \\ a_{21} \ , \ a_{22} \ , \ a_{23} \text{ zu } K_y, \\ a_{31} \ , \ a_{32} \ , \ a_{33} \text{ zu } K_z. \end{aligned} \tag{43}$$

Denkt man sich die Resultante aller Kräfte P im Coordinatenanfangspunkt angebracht, so kann man den Satz aufstellen:

„Das ganze Kräftesystem ist äquivalent einer Reductionsresultanten, angreifend an irgend einem Punkte O in Verbindung mit drei Paaren, deren astatische Arme die Länge gleich der Einheit haben und in drei sich in O schneidende Axen zerfallen, während die Seitenkräfte (K_x, K_y, K_z) derselben die geometrischen Summen

$$\begin{aligned} [a_{11}] + [a_{12}] + [a_{13}], \\ [a_{21}] + [a_{22}] + [a_{23}], \\ [a_{31}] + [a_{32}] + [a_{33}] \end{aligned} \tag{44}$$

darstellen."

Da die Axen der x, y und z, welche die Richtung der astatischen Arme angeben, willkürlich wählbar und nur der

Bedingung unterworfen sind, dass sie auf einander senkrecht stehen, so kann man auf unendlich viele Arten das System von Kräften auf die angegebene Weise reduciren.

Es seien die Axen verschoben und es mögen die neuen Axen durch die Richtungscosinusse der Winkel bestimmt sein, die sie mit den ursprünglichen Axen bilden.

$$\begin{aligned} &OX' \text{ durch } \alpha,\ \beta,\ \gamma;\\ &OJ' \text{ durch } \alpha',\ \beta',\ \gamma';\\ &OZ' \text{ durch } \alpha''\ \beta''\ \gamma''. \end{aligned} \tag{45}$$

Der astatische Arm ist nun aber gleich der Einheit, mithin wird die Projection der Seitenkraft K_x auf die neuen Axen einfach ausgedrückt durch

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha''. \tag{46}$$

Das Paar K_x ist jetzt offenbar äquivalent den Paaren mit der Seitenkraft K_x und den Armen α, α', α'' längs der neuen Axen OX', OJ', OZ'.

Für den Arm gleich der Einheit werden die Seitenkräfte gleich

$$\alpha K_x,\ \alpha' K_y,\ \alpha'' K_z. \tag{47}$$

In analoger Weise werden die beiden anderen Seitenkräfte K_y und K_z durch neue Seitenkräfte längs OX', OJ', OZ' ersetzt:

$$\begin{aligned} &K_y \text{ durch } \beta K_y,\ \beta' K_y,\ \beta'' K_y;\\ &K_z \text{ durch } \gamma K_z,\ \gamma' K_z,\ \gamma'' K_z. \end{aligned} \tag{48}$$

Fassen wir jetzt nur noch die Arme ins Auge, welche mit der Axe OH' zusammenfallen, welche die Seitenkräfte:

$$\alpha K_x,\ \beta K_y,\ \gamma K_z \tag{49}$$

haben.

Indem jetzt

$$K_x,\ K_y,\ K_z$$

nach der Richtung der ursprünglichen Axen OX, OJ, OZ zerlegt werden, ergeben sich die Seitenkräfte parallel zu diesen Axen.

Sie sind der Reihe nach gleich:

$$\begin{aligned} &a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma; \\ &a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma; \\ &a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma. \end{aligned} \tag{50}$$

Erhebt man diese drei Glieder ins Quadrat und addirt sie, so resultirt das Quadrat der Seitenkraft K_{x_1} vom Arme gleich der Einheit längs der Axe OX'.

$$\begin{aligned} K^2_{x_1} = &(a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)^2 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)^2 \\ &+ (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)^2. \end{aligned} \tag{51}$$

In abgekürzter Form

$$K^2_{x_1} = A_x\alpha^2 + A_y\beta^2 + A_z\gamma^2 + 2B_x\beta\gamma + 2B_y\gamma\alpha + 2B_z\alpha\beta. \tag{52}$$

Es ist in dieser Gleichung

$$\begin{aligned} A_x &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2; & B_x &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ A_y &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2; & B_y &= a_{21}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} \\ A_z &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2; & B_z &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{22} \end{aligned} \tag{53}$$

Es ist klar, dass sich auch für K_y und K_z ähnliche Gleichungen entwickeln lassen. Man würde sie einfach dadurch erhalten, dass man in den Gleichungen (51) und (52) statt α, β, γ die Werthe α', β', γ' resp. α'', β'', γ'' einsetzte.

Um nun der Gleichung (52) eine geometrische Deutung zu geben, verfahren wir in ganz ähnlicher Weise wie bei den Cauchy-Pointsot'schen und Binet'schen Trägheitsellipsoiden.

Von O aus wird auf der Axe OX' eine Gerade ϱ so abgetragen, dass

$$\varrho^2 K^2_{x_1} = 1 \tag{54}$$

wird.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Endpunktes von ϱ mit x, y, z und multipliciren beide Seiten der Gleichung (52) mit ϱ^2, so erhalten wir, da

$$\varrho\alpha = x, \ \varrho\beta = y, \ \varrho\gamma = z \tag{55}$$

ist, die gesuchte Gleichung des Darboux'schen Centralellipsoides:

$$Axx^2 + Ayy^2 + Azz^2 + 2Bxyz + 2Byzx + 2Bzxy = 1. \quad (56)$$

Im Allgemeinen wird diese Gleichung ein Ellipsoid darstellen, welches jedoch auch in einem Cylinder degeneriren kann.

Multipliciren wir beide Seiten der Gleichung (51) mit ϱ^2, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (55):

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^2 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^2 = 1. \quad (57)$$

Diese Gleichung repräsentirt einen Cylinder.

Für K_{y_1} und K_{z_1} könnte man auch Ellipsoide construiren, indem man auf der Axe OJ' resp. OZ' ϱ' resp. ϱ'' so abtrüge, dass

$$\varrho''^2 K^2_{y_1} = 1, \text{ resp. } \varrho'''^2 K^2_{z_1} = 1 \quad (58)$$

würde.

Lässt man durch geeignete Verschiebung die Coordinatenaxen mit den Hauptaxen zusammenfallen, welche zu dem durch Gleichung (52) dargestellten Ellipsoide gehören, so verschwinden die Coefficienten der drei letzten Glieder:

$$Bx,\ By,\ Bz \quad (59)$$

Ax, Ay, Az reduciren sich auf a_{11}, a_{22} und a_{23}.

Die Gleichung des Centralellipsoides auf seine Hauptaxen bezogen ist demnach:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 1. \quad (60)$$

Ist dieses Ellipsoid ein dreiaxiges, so können nur vier Gleichgewichtslagen existiren. Für den Fall eines Rotationsellipsoides dagegen können alle die Lagen Gleichgewichtslagen werden, welche durch Rotation um irgend einen Diameter der Aequatorebene entstehen. Wird das Centralellipsoid eine Kugel, so werden alle Axen des Mittelpunktes Gleichgewichtsaxen.

In den beiden letzten Fällen existiren also unendlich viele Gleichgewichtslagen.

Wegen der geometrischen Eigenschaften des Ellipsoides resp. der Diameter desselben lassen sich jetzt über die Astatik eine Reihe von Sätzen sofort ableiten, in ähnlicher Weise wie bei den Trägheitsellipsoiden.

Bekannt ist bereits der Satz:

„Für alle Reductionen eines Kräftesystems auf eine durch einen Punkt O gehende Resultante und drei Paare, deren astatische Arme die Richtungen von drei zu einander senkrechten Strahlen von O haben, ist die Quadratsumme der auf den astatischen Arm gleich der Einheit reducirten Seitenkräfte constant."

Sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Hauptsemidameter des Centralellipsoides, so folgt aus Gleichung (54), indem

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \tag{61}$$

sein mag,

$$\varrho_1^2 K^2 x'_1 = 1;\ \varrho_2^2 K^2 x''_1 = 1;\ \varrho_3^2 K^2 x'''_1 = 1. \tag{62}$$

Kx'_1 stellt die Seitenkraft des Paares vom Arme gleich der Einheit längs der kleinen Halbaxe des Centralellipsoides, Kx''_1 längs der mittleren und Kx'''_1 längs der grossen Halbaxe dar.

Wie der vorhin erwähnte Satz eine Interpretation des Satzes ist, dass die reciproke Quadratsumme dreier zu einander senkrechten Semidiameter des Ellipsoides constant ist, so folgt aus dem Umstande, dass ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 conjugirte Diameter sind, also ihre Quadratsumme constant ist, mit Rücksicht auf Gleichung (62) sofort:

„Die reciproke Quadratsumme der Seitenkräfte der Paare vom Arme gleich der Einheit längs der conjugirten Axen des Centralellipsoides ist constant, nämlich gleich der reciproken Quadratsumme der Seitenkräfte der Paare vom Arme gleich der Einheit längs der Hauptaxen des Ellipsoides."

Ferner folgt aus dem Satze über das Produkt conjugirter Diameter des Ellipsoides:

„Das Produkt der Seitenkräfte der Paare vom Arme gleich der Einheit längs der conjugirten Axen des Ellipsoides ist constant, nämlich gleich dem Produkt der Seitenkräfte der Paare vom Arme gleich der Einheit längs der Hauptaxen des Centralellipsoides."

Aus der Eigenschaft des Ellipsoides, dass der Ort der Axen gleicher Länge ein Kegel zweiten Grades ist, können wir auch noch folgern:

„Der Ort aller Axen eines Punktes von gleichen Seitenkräften der Paare vom Arme gleich der Einheit ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit dem Centralellipsoid dieses Punktes gleiche Hauptaxen besitzt und dasselbe in einem sphärischen Kegelschnitte durchdringt."

Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass zwischen dem Darboux'schen Centralellipsoide und den Cauchy-Poinsot'sche und Binet'schen Trägheitsellipsoiden auch noch insofern eine Analogie besteht, als das Centralellipsoid ebenfalls allgemeiner aufgefasst werden kann, als wir es in unserer Untersuchung gethan haben.

Setzt man in Gleichung (54)

$$\varrho^2 K^2 x_1 = \text{const.} \qquad (63)$$

und legt dieser Constanten der Reihe nach verschiedene Werthe bei, so erhält man eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Centralellipsoide, von denen jedes dieselben Resultate liefern würde, wie das oben behandelte, wo wir für die Constante der Gleichung (63) den Werth gleich der Einheit angenommen haben.